

Sciences Physiques

Supplément

TABLE DES MATIERES

1. MECANIQUE	3
1.1. BASE DE FRENET	3
1.2. COORDONNEES D'UN POINT ET D'UN VECTEUR	6
1.3. REFERENTIEL	9
1.4. SYSTEMES DE COORDONNEES	10
1.5. LA DERIVATION EN PHYSIQUE	12
1.6. CHANGEMENT DE REFERENTIEL	15
2. ONDES	18
2.1. FONCTION MATHEMATIQUE	18

1. Mécanique

1.1. Base de Frénet

1. Extrait du COURS

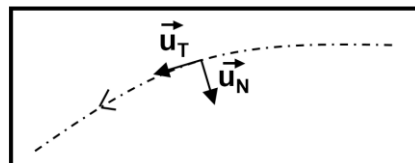
Il existe une base de vecteurs orthonormés attachée à la trajectoire appelée **base de Frénet** définie par :

$\vec{u}_T$ Tangent à la trajectoire et dirigé suivant le sens de parcourt de celle-ci.
 $\vec{u}_N$ Perpendiculaire à $\vec{u}_T$ et dirigé vers le centre de la trajectoire.

Dans cette base, le vecteur accélération s'exprime ainsi :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}(t) \vec{u}_T(t) + \frac{\|\vec{v}(t)\|^2}{\rho} \vec{u}_N(t)$$

$\|\vec{v}\|$ désigne la **norme** du vecteur vitesse.
 ρ désigne le **rayon de courbure** de la trajectoire.



2. Démonstration

Expression de $\vec{v}(t)$ et de sa dérivée par rapport au temps : exposition du problème

Le vecteur vitesse étant tangent à la trajectoire, il est colinéaire au vecteur $\vec{u}_T(t)$ et de même sens. La norme du vecteur $\vec{u}_T(t)$ étant égale à 1, le vecteur vitesse s'écrit ainsi :

$$\vec{v}(t) = \|\vec{v}(t)\| * \vec{u}_T(t)$$

Or par définition, $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t)$

$$\text{Et donc } \vec{a}(t) = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}(t) * \vec{u}_T(t) + \|\vec{v}(t)\| * \frac{d\vec{u}_T}{dt}(t)$$

Montrer que $\vec{a}(t) = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}(t) * \vec{u}_T(t) + \frac{\|\vec{v}(t)\|^2}{\rho} * \vec{u}_N(t)$ revient donc à montrer que :

$$\frac{\|\vec{v}(t)\|}{\rho} * \vec{u}_N(t) = \frac{d\vec{u}_T}{dt}(t)$$

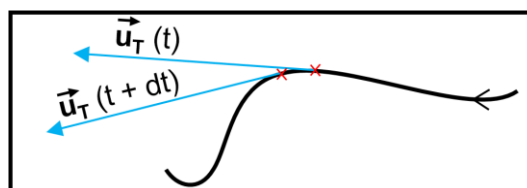
Dérivée de $\vec{u}_T(t)$ par rapport au temps en tant que limite de taux d'accroissement

Reprenons la définition mathématique de la dérivée : $\frac{d\vec{u}_T}{dt}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_T(t + \tau) - \vec{u}_T(t)}{\tau}$

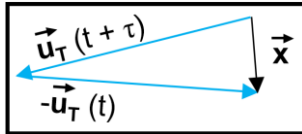
Examinons donc le taux d'accroissement $\frac{\vec{u}_T(t + \tau) - \vec{u}_T(t)}{\tau}$ avant d'en prendre la limite.

Nommons $\vec{x} = \vec{u}_T(t + \tau) - \vec{u}_T(t)$

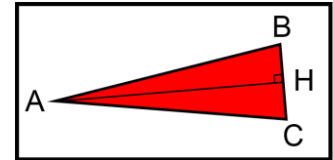
Le schéma ci-contre représente la trajectoire ainsi que les vecteurs $\vec{u}_T(t)$ et $\vec{u}_T(t + \tau)$.



On construit donc le vecteur $\vec{x}$ (cf. schéma ci-dessous).



Les trois vecteurs forment un triangle représenté ci-contre.



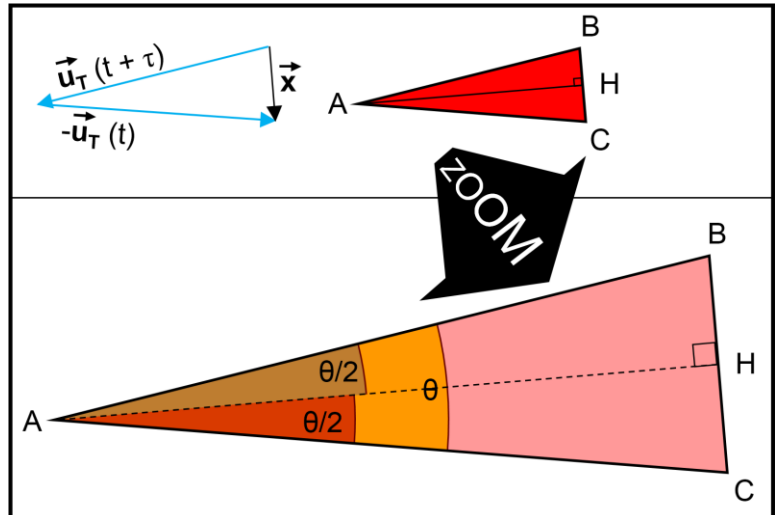
Détermination de la norme de $\vec{x}$

Les cotés AB et AC du triangle sont de norme 1 conformément à la norme des vecteurs unitaires $\vec{u}_T(t)$ et $\vec{u}_T(t+\tau)$.

Le triangle ABC est donc isocèle et AH la hauteur issue de A est également une médiatrice du segment BC.

Les triangles ABH et ACH sont rectangles en H.

La norme du segment BC est celle du vecteur $\vec{x}$.



Dans les triangles ABH et ACH on a : $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{BH}{AB}$ et $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{HC}{AC}$

Ce qui peut être approximé pour de petits angles par : $\frac{\theta}{2} = \frac{BH}{AB}$ et $\frac{\theta}{2} = \frac{HC}{AC}$

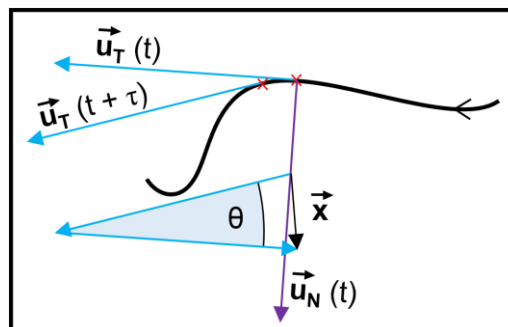
Et puisque $AB = AC = 1$, on a : $\theta = \frac{BH}{1} + \frac{HC}{1}$ c'est-à-dire $\theta = \frac{BC}{1}$

Ainsi $\|\vec{x}\| = \theta$

Détermination de la direction et du sens de $\vec{x}$

Déterminons à présent la direction et le sens de $\vec{x}$. Le schéma ci-dessous montre que le vecteur $\vec{x}$ a « presque » la même direction et le même sens que le vecteur $\vec{u}_N(t)$.

Or lorsque τ va tendre vers 0, θ va également tendre vers 0 et donc la direction de $\vec{u}_T(t+\tau)$ va tendre vers celle de $\vec{u}_T(t)$ et par conséquent la direction de $\vec{x}$ va tendre vers celle de $\vec{u}_N(t)$



Bilan intermédiaire

$\vec{x}$ (c'est-à-dire $\vec{u}_T(t + \tau) - \vec{u}_T(t)$) :
a pour norme θ
et lorsque τ vers 0, la direction et le sens de $\vec{u}_N(t)$

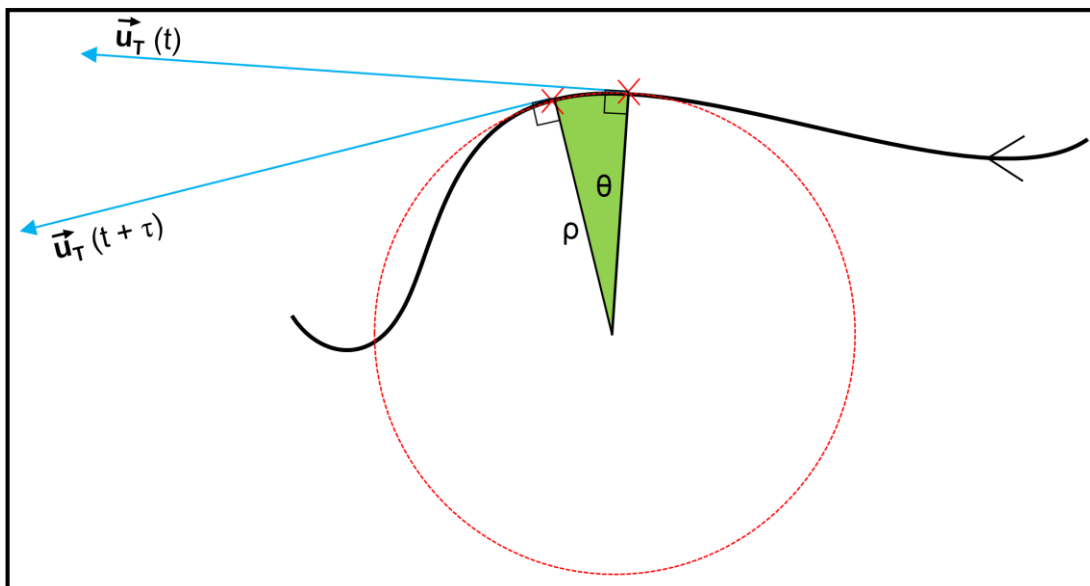
Ainsi, $\frac{\vec{u}_T(t + \tau) - \vec{u}_T(t)}{\tau}$ a pour norme $\frac{\theta}{\tau}$ et lorsque τ vers 0, la direction et le sens de $\vec{u}_N(t)$.

$$\text{Et donc } \frac{d\vec{u}_T}{dt}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_T(t + \tau) - \vec{u}_T(t)}{\tau} \text{ a : } \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{\theta}{\tau} \right)$$

La même direction et le même sens que $\vec{u}_N(t)$.

Détermination de la norme de $\vec{x}$ en fonction de ρ et de $\|\vec{v}(t)\|$

Le rayon de courbure ρ d'une portion de la trajectoire est le rayon du cercle qui approxime au mieux cette portion de trajectoire. Sur le schéma, le cercle en pointillé rouge approxime au mieux la portion de trajectoire comprise entre t et $t + \tau$. L'angle au centre interceptant l'arc de cercle qui approxime la trajectoire a pour valeur θ , l'angle formé entre $\vec{u}_T(t)$ et $\vec{u}_T(t + \tau)$.



La longueur de l'arc de cercle vaut $L = \rho * \theta$.

Or cet arc de cercle est parcouru pendant une durée τ à une vitesse dont la norme peut être considérée comme « presque » constante et égale à $\|\vec{v}(t)\|$ si τ est suffisamment petit. Une bonne approximation pour l'expression de la longueur de l'arc est donc $L = \|\vec{v}(t)\| * \tau$. Cette approximation est d'autant meilleure que τ est petit.

Ainsi, l'approximation $\frac{\theta}{\tau} = \frac{\|\vec{v}(t)\|}{\rho}$ qui résulte des deux expressions de L devient exacte

lorsque τ tend vers 0 ce qui revient à : $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\theta}{\tau} = \frac{\|\vec{v}(t)\|}{\rho}$

Bilan : $\frac{d\vec{u}_T}{dt}(t)$ a pour norme $\frac{\|\vec{v}(t)\|}{\rho}$ et la même direction et le même sens que $\vec{u}_N(t)$

Ainsi : $\frac{d\vec{u}_T}{dt}(t) = \frac{\|\vec{v}(t)\|}{\rho} * \vec{u}_N(t)$ La démonstration est achevée

Avertissement : La présentation qui est faite dans les pages suivantes de certains objets et opérations mathématiques ne prétend pas constituer un ensemble de définitions rigoureuses. Elle a pour seul objectif d'en permettre une utilisation simple dans le cadre de ce cours de physique.

1.2. Coordonnées d'un point et d'un vecteur

3. Base de vecteurs

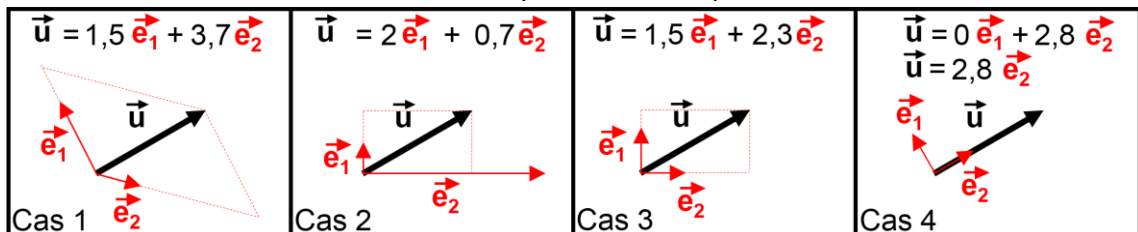
Dans l'espace à 3D, une **base** de vecteurs est définie par trois vecteurs non coplanaires. $(\vec{e}_1 ; \vec{e}_2 ; \vec{e}_3)$. Toute base permet d'exprimer n'importe quel vecteur $\vec{u}$ comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs :

$$\vec{u} = a \vec{e}_1 + b \vec{e}_2 + c \vec{e}_3 \quad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont trois nombres réels.}$$

Coordonnées de $\vec{u}$:

a, b et c sont appelés les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1 ; \vec{e}_2 ; \vec{e}_3)$.
on les note souvent $(a ; b ; c)$.

Illustration schématique dans un espace à 2D :



Une base est dite normée et orthogonale (i.e. **base orthonormée**) lorsque les trois vecteurs de la base sont :

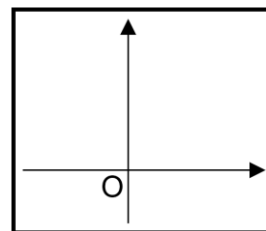
Des vecteurs unitaires (un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme vaut 1)
Orthogonaux entre eux.

Propriété : Un vecteur $\vec{u}$ n'est parfaitement défini que si on en connaît les coordonnées (peu importe la base).

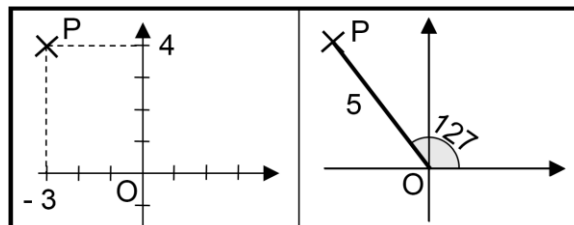
Remarque : Dans tout ce qui suit, les bases de vecteurs sont orthonormées.

4. Coordonnées d'un point dans l'espace

On appelle **coordonnées d'un point** dans l'espace à 3D la donnée de trois nombres associés à des unités (a ; b ; c) permettant de repérer la position de ce point (dans un espace à 2D, il en suffit de deux). En physique, les coordonnées d'un point ne peuvent être interprétées qu'à la condition d'avoir défini au préalable un point de référence (une origine O) ainsi qu'un système de deux axes non colinéaires (dans un espace à 2D : illustration ci-contre) ou de trois axes non coplanaires (dans un espace à 3D).



Afin de représenter les coordonnées du point P sur le schéma, il est nécessaire de définir au préalable une échelle des distances, que l'on peut reporter par exemple sur chacun des axes. Dans la représentation schématisée ci-contre (dans un espace à 2D) le point P est positionné à 5 km du point O.



Coordonnées (- 3 km ; 4 km) :

- 3 km représente « l'abscisse » (3 km représente la distance à parcourir le long de l'axe horizontal depuis O et « - » le sens du parcours : vers la gauche).

4 km représente « l'ordonnée » (4 km représente la distance à parcourir le long de l'axe vertical depuis O et « + » le sens du parcours : vers le haut).

Coordonnées (5 km ; 127°) :

127° représente l'angle (dans le sens direct) entre l'axe horizontal orienté et le vecteur $\overrightarrow{OP}$.

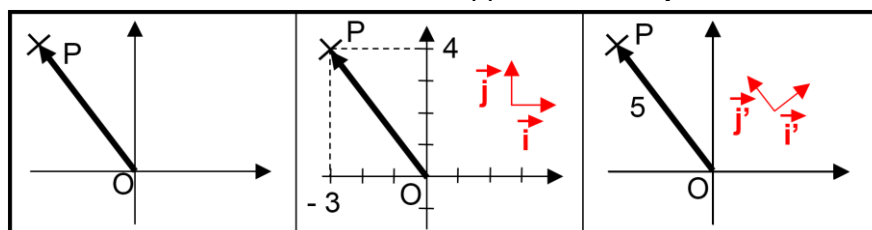
5 km représente la distance à parcourir depuis le point O jusqu'au point P.

Remarque : Les coordonnées d'un point dans l'espace (- 3 ; 4) ou (5 ; 127) sont souvent écrites sans leurs unités sans doute pour alléger les notations. Il ne faut pas perdre de vue que ces nombres ne représentent rien en physique sans leurs unités.

5. Coordonnées de vecteurs

Le vecteur position

La position d'un point P est parfaitement définie par les coordonnées du point P. Elle l'est également par les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP}$ appelé **vecteur position**.



Dans la base $\vec{i}, \vec{j}$: $\overrightarrow{OP} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$
 Dans la base $\vec{i}', \vec{j}'$: $\overrightarrow{OP} = 0\vec{i}' + 5\vec{j}'$

les coordonnées de $\overrightarrow{OP}$ sont (- 3 ; 4)
 les coordonnées de $\overrightarrow{OP}$ sont (0 ; 5)

Remarque : Là encore, les coordonnées de $\overrightarrow{OP}$ sont souvent écrites sans leurs unités sans doute pour alléger les notations. Il ne faut pas perdre de vue que ces nombres ne représentent rien en physique sans leurs unités.

Vecteur quelconque

Il existe en physique de nombreuses grandeurs qui sont représentées par des vecteurs : la position, la vitesse, le champ électrique, l'accélération, la force, la quantité de mouvement etc... Tous ces vecteurs peuvent être exprimés à l'aide des vecteurs unitaires d'une base donnée (par exemple la base $\vec{i}, \vec{j}$) de la manière suivante : $\vec{X} = a\vec{i} + b\vec{j}$

a et b sont les coordonnées du vecteurs.

Ce sont des nombres associés à des unités.

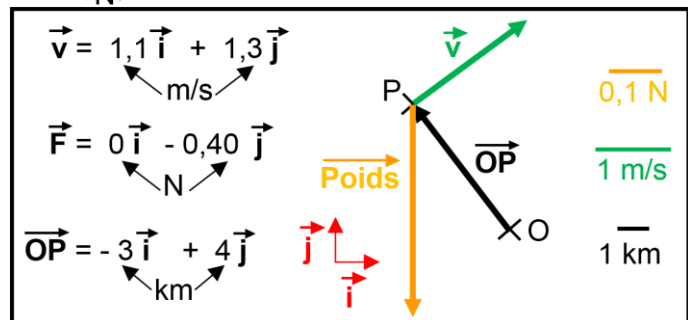
nombre
et unité

Par exemple :

Un vecteur vitesse peut s'écrire : $\vec{v} = 1,5\vec{i} + -2,3\vec{j}$

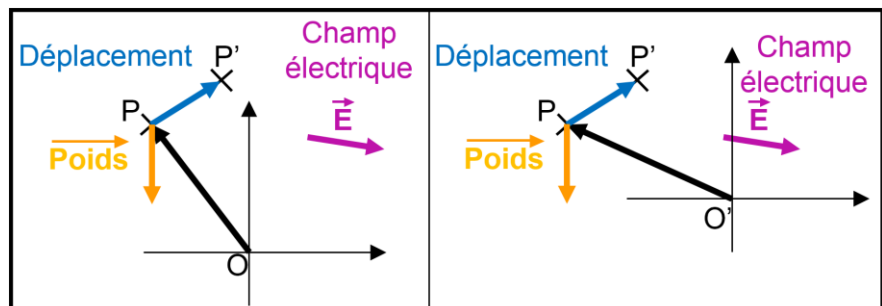
Un vecteur force peut s'écrire : $\vec{F} = 6,4\vec{i} + 1,2\vec{j}$

Afin de représenter ces vecteurs sur un schéma, il est nécessaire de définir au préalable une échelle des vitesses et une échelle des forces. Ainsi sur un même schéma se superposent des échelles indépendantes (distance, vitesse, force, etc...) et l'on peut représenter des vecteurs représentant des grandeurs différentes ($\vec{OP}$, $\vec{v}$, $\vec{F}$, etc...).

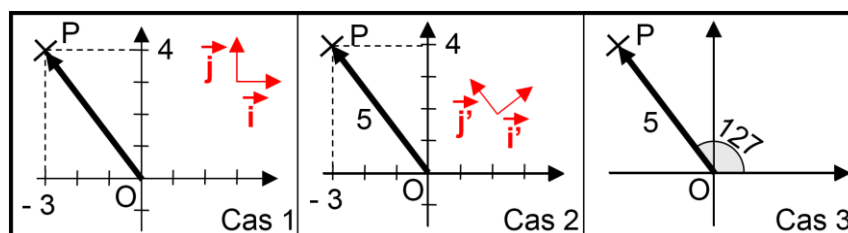


Vecteur position et origine

Le vecteur position $\vec{OP}$ dépend du choix du point de référence (i.e. l'origine O). En revanche aucun autre vecteur (déplacement, force, accélération, champ, etc...) ne dépend du choix de O.



Coordonnées d'un point et coordonnées du vecteur position



Il arrive que l'on choisisse pour les coordonnées du point P les coordonnées du vecteur $\vec{OP}$. Il faut pour cela que chaque vecteur unitaire soit colinéaire à un axe et orienté dans le même sens que lui. Le cas 1 illustre cette situation.

Il arrive aussi que l'on choisisse pour les coordonnées du point P d'autres valeurs que celles du vecteur position $\vec{OP}$:

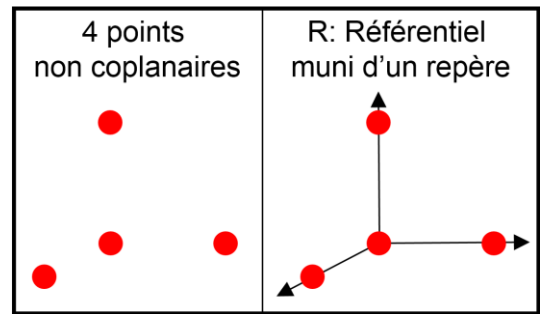
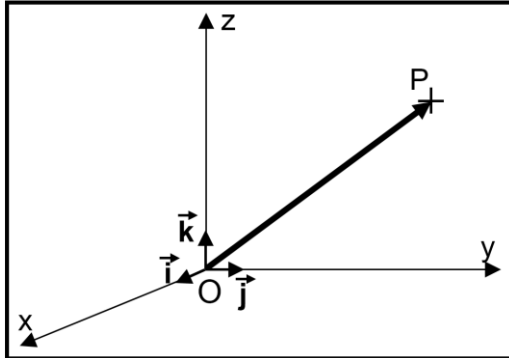
Lorsque les vecteurs unitaires de la base ne sont pas colinéaires aux axes. Le cas 2 illustre cette situation : coordonnées du point P (-3 ; 4) et coordonnées de $\vec{OP}$ (0 ; 5).

Lorsque certaines coordonnées du point P ne sont pas des distances. Le cas 3 illustre cette situation : coordonnées du point P (5 ; 127).

1.3. Référentiel

6. Référentiel et repère

Un **référentiel** est défini par un ensemble de quatre points n'appartenant pas au même plan et immobiles les uns par rapport aux autres (ou plus communément par un solide indéformable de référence).



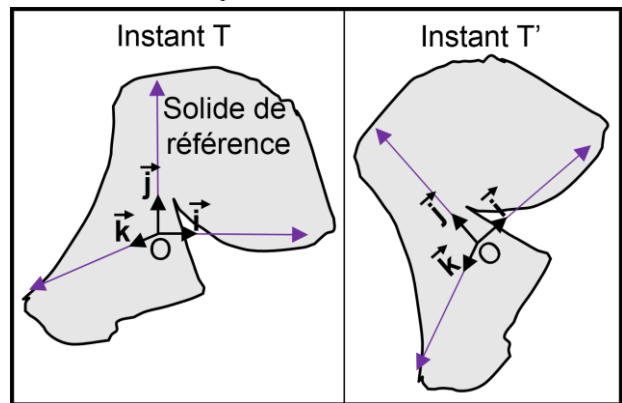
A partir des points du référentiel, on définit un **repère**, ensemble de trois axes physiquement liés au référentiel (souvent orthogonaux) qui se croisent en un point (appelé origine et noté O).

Puis on associe une base de vecteurs unitaires liée aux axes du repère ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sur le schéma). Référentiel

et repère sont définis de manière indissociable. Cet ensemble est noté R. Dans un référentiel, la position d'un point P est repérée par rapport à l'origine O du repère. On associe à cette position le vecteur $\vec{OP}$.

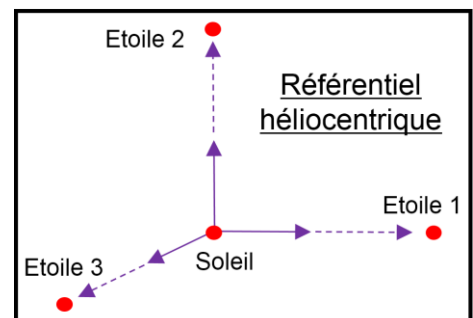
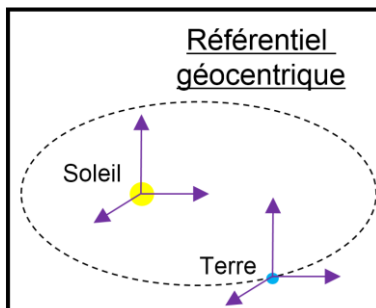
Propriété :

Les trois vecteurs unitaires appartenant aux axes liés au référentiel R sont par définition fixes dans R, c'est-à-dire qu'ils ne varient pas dans le temps *par rapport à R*.



7. Exemples de référentiels

Le référentiel **Héliocentrique** (ou référentiel de Kepler) est défini par O le centre du Soleil¹ et 3 étoiles très éloignées du système solaire (suffisamment éloignées pour qu'elles soient considérées comme fixes entre elles et par rapport à O). Les trois axes sont les trois droites partant de O et joignant les trois étoiles².



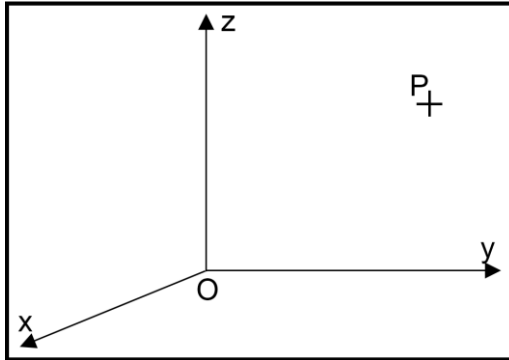
Le référentiel **Géocentrique** a pour centre le centre de la Terre. Pour le reste, il est défini par rapport au référentiel Héliocentrique car ses trois axes sont parallèles à ceux du référentiel Héliocentrique. Il n'est donc pas nécessaire de définir trois points supplémentaires.

¹ Le référentiel de Copernic a pour centre le centre de masse du système solaire (qui coïncide presque avec celui du Soleil).

² Cette définition pose un problème, car l'Univers étant en expansion, aucune étoile n'est vraiment fixe par rapport à O. Elle illustre bien les approximations qu'il faut toujours faire lorsqu'on veut plaquer un modèle ou une définition mathématique à une situation physique réelle, toujours infiniment complexe.

Un référentiel **Terrestre** a pour solide de référence la Terre. Ses 4 points *sont des points matériels* de la Terre : tout ensemble de trois axes non coplanaires liés à la Terre, se coupant en un point O est un référentiel terrestre. Le centre de la Terre, et trois axes perpendiculaires entre eux, fixes par rapport à la Terre, et issus de son centre constituent un exemple de référentiel terrestre.

1.4. Systèmes de coordonnées



On se donne trois axes orthogonaux sécants en un point O afin de définir la position d'un point P quelconque.

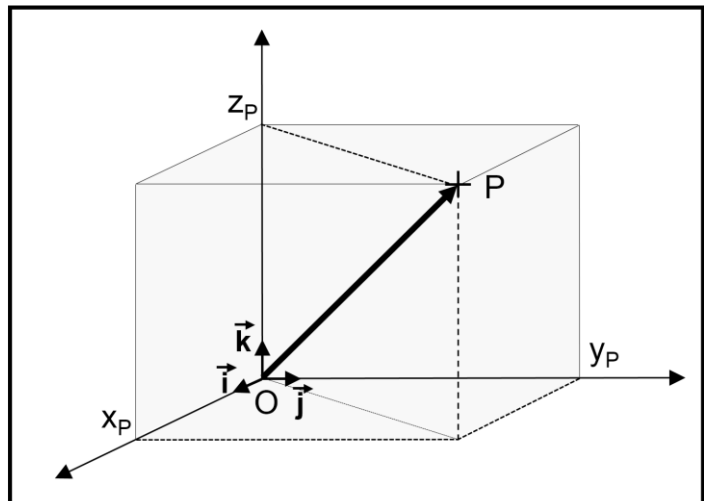
Dans cette section on exprime les coordonnées de P et du vecteur position $\vec{OP}$ dans trois bases de vecteurs unitaires différentes. La présentation faite ici est indépendante du choix du référentiel.

8. Coordonnées cartésiennes

La base cartésienne est constituée des vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ dirigés le long des axes Ox, Oy et Oz.

Le vecteur $\vec{OP}$ s'écrit :

$$\vec{OP} = x_P \vec{i} + y_P \vec{j} + z_P \vec{k}$$



9. Coordonnées cylindriques

Soit le segment formé par O et le projeté orthogonal de P sur le plan (Ox ; Oy).

On appelle :

r_P : la longueur de ce segment

$\vec{e}_r$: le vecteur unitaire dont la direction est celle du segment et le sens celui de O vers le projeté orthogonal de P sur le plan (Ox ; Oy).

θ : l'angle orienté entre [Ox] et $\vec{e}_r$

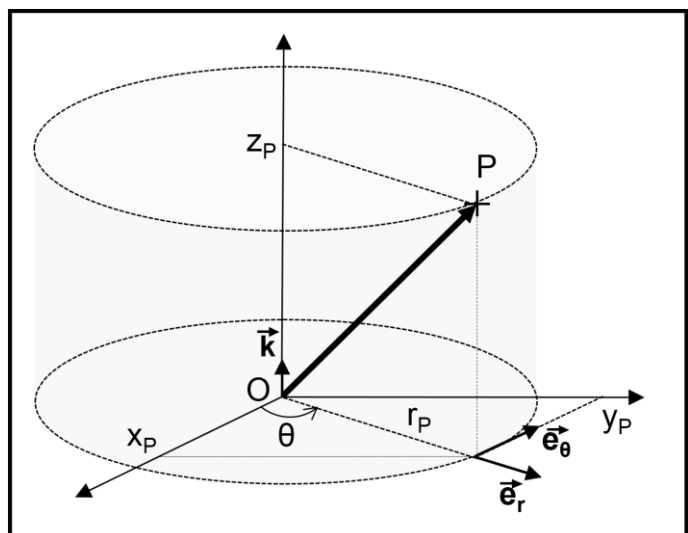
$\vec{e}_\theta$: le vecteur unitaire appartenant au plan (Ox ; Oy), orthogonal à $\vec{e}_r$ dans le sens indiqué sur le schéma.

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k}$ est la base cylindrique.

r_P, θ, z sont les coordonnées de P.

Le vecteur $\vec{OP}$ s'écrit :

$$\vec{OP} = r_P \vec{e}_r + z_P \vec{k}$$



10. Cordonnées sphériques

On appelle :

φ : l'angle orienté entre $[Oz]$ et $\overrightarrow{OP}$.

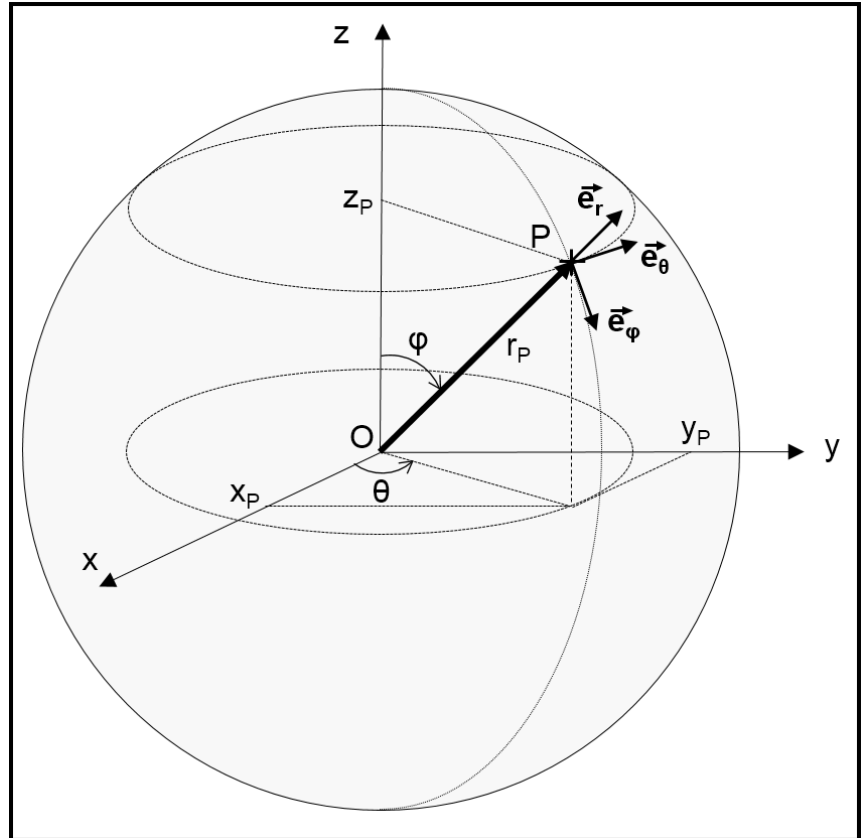
θ : l'angle orienté entre $[Ox]$ et le segment formé par O et le projeté orthogonal de P sur le plan $(Ox ; Oy)$.

r_P : la norme de $\overrightarrow{OP}$.

$\vec{e}_r$: le vecteur unitaire dont la direction et le sens est celui de $\overrightarrow{OP}$.

$\vec{e}_\theta$: le vecteur unitaire appartenant à un plan orthogonal à $[Oz]$, perpendiculaire à $\vec{e}_r$ dans le sens indiqué sur le schéma.

$\vec{e}_\varphi$: le vecteur unitaire perpendiculaire à la fois à $\vec{e}_r$ et à $\vec{e}_\theta$ dans le sens indiqué sur le schéma. Ce vecteur est tangent au cercle de centre O et de rayon r_P et situé dans le plan $(OP ; Oz)$.



$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ est la base sphérique.

r_P, θ, φ sont les coordonnées de P.

Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OP} = r_P \vec{e}_r$$

Remarques : θ et $\vec{e}_\theta$ sont rigoureusement identiques aux θ et $\vec{e}_\theta$ définis pour les coordonnées cylindriques.

r et $\vec{e}_r$ en revanche bien qu'ils portent le même nom, sont différents de r et de $\vec{e}_r$ définis pour les coordonnées cylindriques.

11. Changement de coordonnées

Les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ de la base cylindrique peuvent être exprimés en fonction des vecteurs de la base cartésienne de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j} \\ \vec{e}_\theta &= -\sin(\theta) \vec{i} + \cos(\theta) \vec{j}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ de la base sphérique peuvent être exprimés en fonction des vecteurs de la base cartésienne de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \sin(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\varphi) \sin(\theta) \vec{j} + \cos(\varphi) \vec{k} \\ \vec{e}_\theta &= -\sin(\theta) \vec{i} + \cos(\theta) \vec{j} \\ \vec{e}_\varphi &= \cos(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + \cos(\varphi) \sin(\theta) \vec{j} - \sin(\varphi) \vec{k}\end{aligned}$$

Exercice : Démontrer les formules données ci-dessus.

Montrer que ces formules sont compatibles avec le fait que tous les vecteurs sont des vecteurs unitaires.

1.5. La dérivation en Physique

Il est rare qu'une grandeur physique soit absolument constante. Par exemple, la position d'un objet dépend du temps lorsqu'il se déplace, et la masse volumique d'un liquide dépend de la température. On utilise l'outil mathématique de la dérivation de fonction pour étudier l'effet de la modification d'une variable (temps, température) sur une grandeur physique (position, masse volumique).

Les situations rencontrées en physique sont très diverses, et souvent complexes : une fonction peut dépendre de plusieurs variables, elle peut être un scalaire (une tension électrique) ou un vecteur (une vitesse, une force...), un nombre complexe...

Lorsqu'une fonction dépend de plusieurs variables (temps, température, masse...) il faut préciser la variable par rapport à laquelle on dérive. Par exemple, la masse volumique de l'eau de mer ρ dépend de la température T , mais aussi de la concentration en sel C . Ceci se traduit par la notation $\rho(T, C)$, où l'on montre que ρ dépend des variables T et C :

$\frac{d\rho}{dC}$ désigne la dérivée de ρ par rapport à la variable C (T ayant été maintenue constante) : elle permet de connaître la manière dont une modification de la concentration en sel affecte la masse volumique de l'eau de mer.

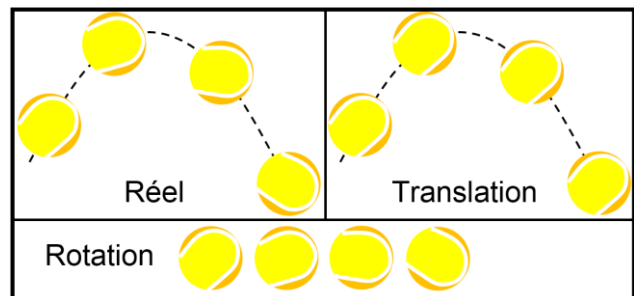
$\frac{d\rho}{dT}$ désigne la dérivée de ρ par rapport à la variable T (C ayant été maintenue constante) : elle permet de connaître la manière dont une modification de température affecte la masse volumique de l'eau de mer.

12. Dérivation d'un vecteur dans un référentiel

Étudions le mouvement d'une balle liftée au tennis. Pour simplifier on suppose que le mouvement de la balle reste dans un plan vertical et qu'il peut être décomposé en deux mouvements types se produisant simultanément :

Un mouvement de translation (le long de la ligne en pointillés qui représente la trajectoire de son centre)

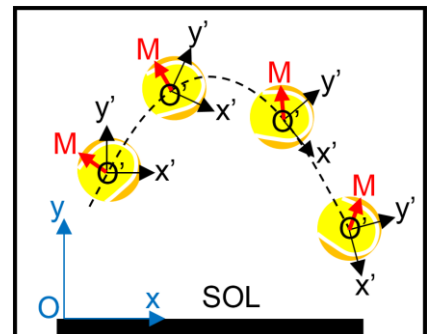
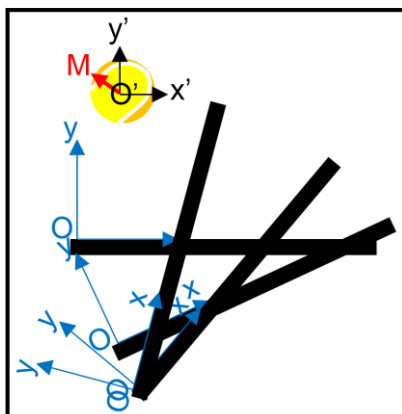
Un mouvement de rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan de la trajectoire passant par le centre de la balle.



Considérons le mouvement d'un point M de la balle dans deux référentiels (le mouvement de la balle étant plan c'est-à-dire à 2D, une origine et deux axes non colinéaires sont suffisants pour définir un repère lié à chaque référentiel) :

R le référentiel terrestre représenté sur le schéma par le repère qui lui est physiquement lié : (O, Ox, Oy) .

R' le référentiel lié à la balle représenté sur le schéma par le repère qui lui est physiquement lié : $(O', O'x', O'y')$ où O' est le centre de la balle.



Observons les variations dans le temps du vecteur $\overrightarrow{O'M}$ (en rouge sur le schéma) :

Dans R' , $\overrightarrow{O'M}$ ne varie pas (cf. schéma à gauche). En effet dans R' , c'est-à-dire par rapport à la balle, $\overrightarrow{O'M}$ reste toujours le même : $\overrightarrow{O'M}$ occupe toujours la même position par rapport aux deux axes $O'x'$ et $O'y'$ liés à R' .

Dans R , $\overrightarrow{O'M}$ varie (voir schéma au-dessus) car sa direction change au cours du temps par rapport aux deux axes Ox et Oy liés à R .

Par conséquent, lorsqu'on dérive $\overrightarrow{O'M}$ par rapport au temps, il faut indiquer si la dérivation s'effectue :

Par rapport à R. On la note : $\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R$

Par rapport à R'. On la note : $\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'}$

13. Fonction vectorielle/fonction scalaire

Lorsqu'une fonction est un vecteur $\vec{F}$, sa dérivée doit prendre en compte les variations de sa norme, de sa direction et de son sens. Il peut alors être pratique d'exprimer ce vecteur de la façon suivante :

$$\vec{F} = F \vec{u}$$

F est la norme de $\vec{F}$:

$\vec{u}$ exprime la direction et le sens de $\vec{F}$:

F est une fonction scalaire

$\vec{u}$ est un vecteur unitaire

Une fonction scalaire n'étant pas orientée (contrairement à un vecteur...), ni sa définition, ni sa dérivée ne dépendent du référentiel. Par conséquent :

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_R \text{ peut s'écrire } \frac{dF}{dt}$$

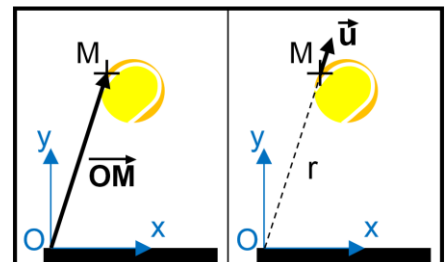
Ainsi, $\vec{F}$ étant le produit d'une fonction scalaire F et d'une fonction vectorielle $\vec{u}$ sa dérivée dans R s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d(F \vec{u})}{dt}\right)_R = \frac{dF}{dt} \vec{u} + F \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R$$

Dans l'exemple de la balle de tennis, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u} \quad \text{où} \quad r = \|\overrightarrow{OM}\|$$

$$\text{Dès lors : } \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d(r \vec{u})}{dt}\right)_R = \frac{dr}{dt} \vec{u} + r \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R$$



14. Le vecteur vitesse

Le **vecteur vitesse** est la dérivée par rapport au temps du vecteur position. Cette définition nécessite la définition préalable du référentiel d'étude car :

- 1- la définition du vecteur position dépend de l'origine O.
- 2- la dérivation d'un vecteur dépend du référentiel.

Dans l'exemple précédent du ballon de football :

Dans R, le vecteur position est défini par $\overrightarrow{OM}$ par conséquent $\vec{v} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R$

Dans R', le vecteur position est défini par $\overrightarrow{O'M}$ par conséquent $\vec{v}' = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'}$

Exercice : Montrer que $\vec{v}' = \vec{0}$ mais que $\vec{v} \neq \vec{0}$

15. Vecteur vitesse et vecteur accélération

On repère la position P d'un point dans l'espace. On considère un référentiel R, et un repère Ox, Oy et Oz lié à R.

La base cartésienne $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ est donc liée à R : ses vecteurs ne varient pas par rapport au temps t.

Les coordonnées de P dans cette base sont x_P, y_P et z_P .

Le vecteur $\vec{OP}$ s'écrit :

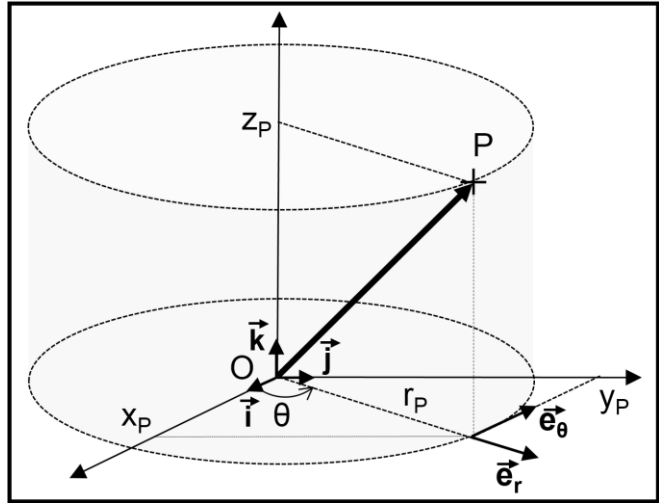
$$\vec{OP} = x_P \vec{i} + y_P \vec{j} + z_P \vec{k}$$

La base cylindrique $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k}$ n'est pas liée à R : ses vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ varient par rapport à t.

r_P, θ, z sont les coordonnées de P.

Le vecteur $\vec{OP}$ s'écrit :

$$\vec{OP} = r_P \vec{e}_r + z_P \vec{k}$$



Exercice 1 : 1°/ Montrer que $\frac{d[\cos(\theta)]}{dt} = -\sin(\theta) \frac{d\theta}{dt}$

2°/ Montrer que $\frac{d\vec{i}}{dt}\bigg|_R = \frac{d\vec{j}}{dt}\bigg|_R = \frac{d\vec{k}}{dt}\bigg|_R = \vec{0}$

3°/ En déduire que $\frac{d\vec{e}_r}{dt}\bigg|_R = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\bigg|_R = -\frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r$

Rappel : $\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j}$
 $\vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{i} + \cos(\theta) \vec{j}$

Exercice 2 : Un objet matériel ponctuel est repéré par le point P, qui se déplace au cours du temps dans l'espace. Son mouvement est étudié dans R.

1°/ Ecrire $\vec{OP}$ dans la base cartésienne.
 Définir $\vec{v}$ le vecteur vitesse de l'objet dans R.
 Déterminer l'expression de $\vec{v}$ dans cette même base.

2°/ Ecrire $\vec{OP}$ dans la base cylindrique.
 Déterminer l'expression de $\vec{v}$ dans cette même base.

3°/ Définir $\vec{a}$ le vecteur accélération de l'objet dans R.

En déduire les expressions de $\vec{a}$:
 Exprimé dans la base cartésienne
 Exprimé dans la base cylindrique

1.6. Changement de référentiel

16. Référentiels en translation l'un par rapport à l'autre

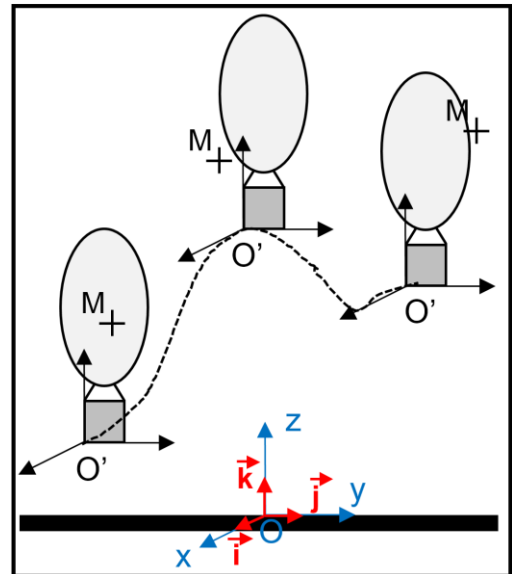
Une montgolfière effectue un mouvement de translation par rapport au sol.

Le sol est un référentiel Terrestre (R : une origine O fixe dans R et trois axes Ox, Oy et Oz liés à R.).

La cabine de la montgolfière est un solide indéformable. On en fait un second référentiel (R' : une origine O' située en bas à gauche de la cabine fixe dans R' et trois axes O'x, O'y et O'z lié à R').

Les axes de R et de R' sont parallèles. Ainsi la base de vecteurs unitaires liée à R est identique à la base de vecteurs unitaires liée à R' : c'est la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Un moucheron (de position notée M) se déplace dans la cabine de la montgolfière.



Rappel sur la signification des notations :

du vecteur $\vec{O'M}$

dérivée

$\left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right\rangle_{R'}$

par rapport à la variable t

dans R', i.e. en considérant constants les vecteurs de la base liée à R'

Exercice :

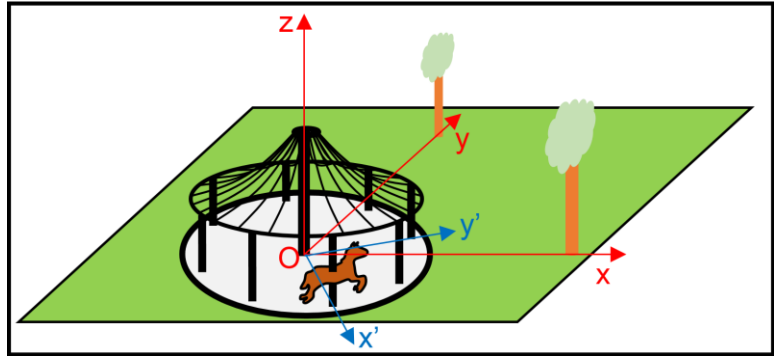
- 1°/ Parmi les vecteurs $\vec{OM}, \vec{OO'}$ et $\vec{O'M}$ lequel est :
L'expression du vecteur position du moucheron dans R ?
L'expression du vecteur position du moucheron dans R' ?
- 2°/ Donner l'expression du vecteur vitesse du moucheron :
Dans R (noté $\vec{v}_M$) Dans R' (noté $\vec{v}'_M$)
- 3°/ Montrer que pour n'importe quel vecteur $\vec{X}$, $\left. \frac{d\vec{X}}{dt} \right\rangle_R = \left. \frac{d\vec{X}}{dt} \right\rangle_{R'}$
- 4°/ En déduire que $\vec{v}_M = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_M$

Définition : Deux référentiels R et R' sont en translation l'un par rapport à l'autre si les axes liés à R sont parallèles aux axes liés à R', ou pour l'écrire autrement si la base liée à R est identique à la base liée à R'.

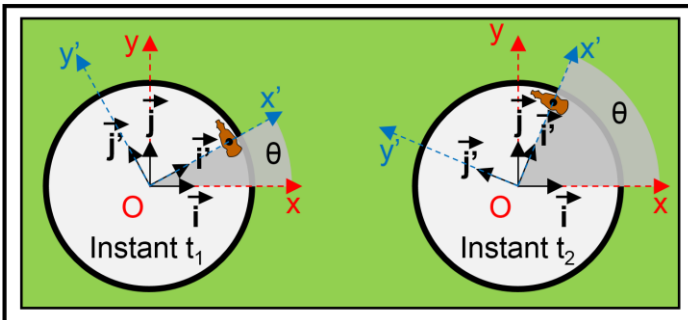
Propriété : Soit un référentiel R de centre O et un référentiel R' de centre O' en translation par rapport à R. Si M est un point qui se déplace dans l'espace alors $\vec{v}_M = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_M$

17. Référentiels en rotation l'un par rapport à l'autre

Un cheval en bois (dont le centre est noté M) tourne autour de l'axe central d'un manège. Il est animé d'un mouvement circulaire autour de l'axe ainsi que d'un mouvement vertical le long du poteau qui le maintient attaché au manège.



Appelons R le référentiel terrestre. L'axe de rotation Oz est son axe vertical. Il coupe le sol en l'origine O. Les deux axes horizontaux Ox et Oy partent de O et pointent vers des arbres, de telle sorte que les trois axes sont orthogonaux. Le repère ainsi défini est lié à R. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ est la base de vecteurs unitaires liée à R. Ces vecteurs ne varient pas au cours du temps dans R.



Appelons R' le référentiel du manège. L'axe de rotation Oz est son axe vertical. Les deux axes horizontaux Ox' et Oy' partent de O. Ox' pointe vers le poteau sur lequel le cheval est accroché et Oy' est perpendiculaire à Ox' comme indiqué que le schéma. Le repère ainsi défini est lié à R'. $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ est la base de vecteurs unitaires liée à R'. Ces vecteurs ne varient pas au cours du temps dans R'.

Vocabulaire : R' est animé d'un mouvement de rotation par rapport à R.

Remarques : Dans cet exemple, l'intersection des trois axes de R comme celle des trois axes de R' est le point O. Le vecteur position est donc $\vec{OM}$ dans R et dans R'. Les coordonnées de M dans la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont (x, y, z), et dans $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ sont (x', y', z).

Exercice 1 :

1°/ Donner l'expression du vecteur position du cheval dans R et R'.

2°/ Donner l'expression du vecteur vitesse du cheval :
dans R (noté $\vec{v}_M$) dans R' (noté $\vec{v}'_M$)

On appelle r la distance entre O et le pied du montant sur lequel est accroché le cheval.

3°/ Montrer que r est une constante.

En déduire que $\vec{v}'_M = \frac{dz}{dt} \vec{k}$

4°/ Exprimer x et y en fonction de r et de θ .
En déduire l'expression de $\vec{v}_M$ en fonction de r, θ , et z (et des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

Montrer que $\vec{v}_M$ peut s'écrire sous la forme $\vec{v}_M = \vec{v}'_M + \vec{\omega} \frac{d\theta}{dt}$
Et donner l'expression du vecteur $\vec{\omega}$.

Propriété : Soit un référentiel R de centre O et un référentiel R' de centre O en rotation par rapport à R (on notera $\vec{\omega}_{R'/R}$ le vecteur rotation de R' par rapport à R). Si M est un point qui se déplace dans l'espace alors $\vec{v}_M = \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM} + \vec{v}'_M$

Remarque : le produit de deux vecteurs $\vec{A}(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{B}(x_B, y_B, z_B)$ exprimés dans une base orthonormée :

Est un vecteur

Se note $\vec{A} \wedge \vec{B}$

A pour coordonnées $(y_A * z_B - z_A * y_B, x_B * z_A - x_A * z_B, x_A * y_B - y_A * x_B)$

Exercice 2 :

1°/ Effectuer le produit vectoriel entre deux vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ ou $\vec{k}$.

2°/ Déterminer les coordonnées de $\vec{\Omega}_{R'/R}$ dans l'exercice précédent.

2. Ondes

2.1. Fonction mathématique

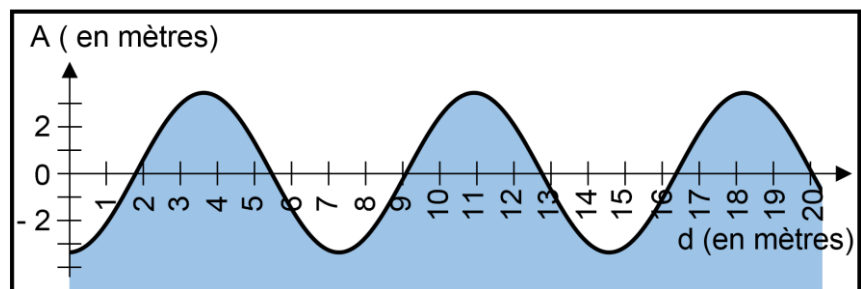
18. Amplitude d'une onde en fonction d'une coordonnée d'espace

On considère une onde périodique sinusoïdale (par exemple la houle à la surface de la mer) se propageant dans une seule direction de l'espace. Le schéma ci-dessus représente la forme de l'eau à un instant donné (considéré par la suite comme l'origine des temps : $t = 0$ s).

La périodicité spatiale de cette onde se manifeste par la répétition d'un motif à la surface de l'eau.

Le caractère sinusoïdal de l'onde tient au fait que ce motif est de forme sinusoïdale, c'est-à-dire que la courbe qui épouse la surface est modélisable par une fonction de type sinus ou cosinus. Notons A cette fonction.

Zoomons sur le schéma précédent et ajoutons-y un axe des abscisses (distance d le long du sens de propagation de l'onde) et un axe des ordonnées (hauteur A du niveau de l'eau). A est une fonction de d qu'on peut noter $A(d)$.



Déterminons l'expression mathématique (à l'instant $t = 0$ s) de la fonction A en fonction de la variable d

Effectuons d'abord quelques mesures sur le schéma ci-dessus :

A varie entre - 3,3 m et 3,3 m.

Définissons $A_{MAX} = 3,3$ m.

Lorsque d vaut 0 m, A est égale à - 3,3 m. Cela se note $A(0) = - 3,3$ m.

La période de A est égale à 7,2 m.

Définissons $\lambda = 7,2$ m.

Modéliser A par la fonction **Sin** soulève quelques difficultés car si A et la fonction sinus ont la « même forme », la fonction sinus :

- 1- Ne varie pas entre - 3,3 m et 3,3 m mais entre - 1 et 1.
- 2- Prend la valeur 0 lorsque x vaut 0 ce qui se note **Sin** (0) = 0
- 3- Ne possède pas une période égale à 7,2 m mais une période égale à 2π .

Construisons l'expression mathématique de la fonction A à partir de la fonction sinus en résolvant les trois difficultés (1-, 2- et 3-) présentées ci-dessus.

Difficulté 1- : Ni les valeurs ni l'unité de la fonction sinus ne sont les mêmes que celles de A . La fonction sinus n'a pas d'unité et elle varie entre - 1 et 1, alors que la fonction A s'exprime en m et varie entre - 3,3 m et 3,3 m. Pour résoudre la difficulté 1/ il faut donc multiplier la fonction sinus par 3,3 m c'est-à-dire par $A_{MAX} = 3,3$ m. Ainsi :

$$A = A_{MAX} * \text{Sin}.$$

Difficulté 2- : L'expression précédente n'est pas encore satisfaisante car $A(0) = -3,3 \text{ m}$ (c'est-à-dire $A(0) = -A_{\text{MAX}}$) alors que $\text{Sin}(0) = 0$. Pour résoudre cette difficulté, il suffit de modifier l'expression précédente de la manière suivante :

$$A = A_{\text{MAX}} * \text{Sin}(x - \pi/2)$$

Ainsi, $A(0) = A_{\text{MAX}} * \text{Sin}(0 - \pi/2) = A_{\text{MAX}} * \text{Sin}(-\pi/2) = -A_{\text{MAX}}$

Difficulté 3- : L'expression précédente $A = A_{\text{MAX}} * \text{Sin}(x - \pi/2)$ pose deux problèmes :

Celui de l'unité : A est une fonction d'une variable d qui s'exprime en mètres et Sin est une fonction d'une variable x qui s'exprime en radians.

Celui de la valeur de la période : celle de A vaut $7,2 \text{ m}$ et celle de Sin vaut 2π .

On peut illustrer ces problèmes en constatant par exemple que :

A vaut $-A_{\text{MAX}}$ pour $d = 0 \text{ m}$, pour $d = 7,2 \text{ m}$, pour $d = 14,4 \text{ m}$, etc...
Et $A_{\text{MAX}} * \text{Sin}(x - \pi/2)$ vaut $-A_{\text{MAX}}$ pour $x = 0$, pour $x = 2\pi$, pour $x = 4\pi$, etc...

Pour les résoudre, il faut faire en sorte que :

Lorsque $d = 0 \text{ m}$ $x = 0$
Lorsque $d = 7,2 \text{ m}$ $x = 2\pi$
Lorsque $d = 14,4 \text{ m}$ $x = 4\pi \dots$

Ce qui nécessite de poser : $x = \frac{2\pi * d}{7,2 \text{ m}}$ c'est-à-dire $x = \frac{2\pi * d}{\lambda}$

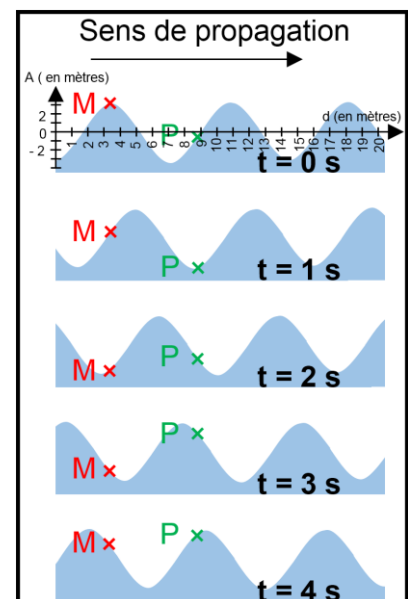
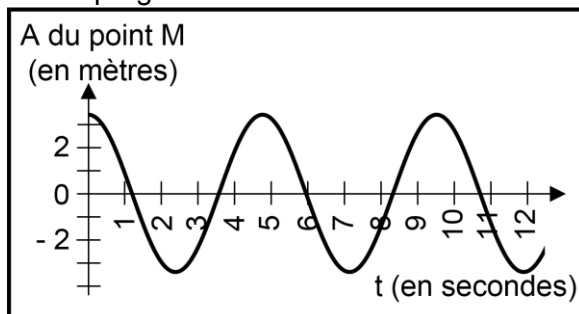
Ainsi, l'expression mathématique de A en fonction de d devient :

$$A(d) = A_{\text{MAX}} * \text{Sin}\left(\frac{2\pi * d}{\lambda} - \pi/2\right)$$

19. Amplitude d'une onde en fonction du temps

Le schéma ci-contre montre la forme de l'eau à cinq instants successifs ($t = 0 \text{ s}$, $t = 1 \text{ s}$, $t = 2 \text{ s}$, $t = 3 \text{ s}$, et $t = 4 \text{ s}$) lors de la propagation de l'onde vers la droite, c'est à dire dans le sens croissant de la variable d . Lors du passage de l'onde, tout point de la surface de l'eau (par exemple les points M et P sur le schéma) effectue le même mouvement d'oscillation verticale tout en restant à la même abscisse (sur le schéma on lit que le point M reste à l'abscisse $d_M = 3,5 \text{ m}$, et le point P à l'abscisse $d_P = 8,7 \text{ m}$). La hauteur A de chaque point oscille entre $-3,3 \text{ m}$ et $3,3 \text{ m}$ (c'est-à-dire entre $-A_{\text{MAX}}$ et A_{MAX}).

La hauteur A d'un point quelconque à la surface de l'eau, par exemple le point M, suit au cours du temps un mouvement répétitif d'oscillations verticales. La courbe représentant la hauteur A du point M au cours du temps (ci-dessous) est donc une fonction périodique (dont il est aisé de montrer que si l'onde progresse à vitesse constante sa forme est sinusoïdale).



Déterminons l'expression mathématique (au point M d'abscisse d_M) de la fonction **A** en fonction de la variable t

Effectuons d'abord quelques mesures sur le schéma ci-dessus :

- | | |
|--|---|
| A varie entre - 3,3 m et 3,3 m | C'est-à-dire entre - A_{MAX} et A_{MAX} . |
| Lorsque t vaut 0 s, A est égale à A_{MAX} . | Cela se note A (0) = A_{MAX} . |
| La période de A est égale à 4,7 s. | Définissons $T = 4,7$ s. |

Modéliser **A** par la fonction **Sin** soulève quelques difficultés car si **A** et la fonction sinus ont la « même forme », la fonction sinus :

- 1- Ne varie pas entre - 3,3 m et 3,3 m mais entre - 1 et 1.
- 2- Prend la valeur 0 lorsque x vaut 0 ce qui se note **Sin** (0) = 0
- 3- Ne possède pas une période égale à 4,7 s mais une période égale à 2π .

Construisons l'expression mathématique de la fonction **A** à partir de la fonction sinus en résolvant les trois difficultés (1-, 2- et 3-) présentées ci-dessus.

Difficulté 1- : Ni les valeurs ni l'unité de la fonction sinus ne sont les mêmes que celles de **A**. La fonction sinus n'a pas d'unité et elle varie entre - 1 et 1, alors que la fonction **A** s'exprime en m et varie entre - 3,3 m et 3,3 m. Pour résoudre la difficulté 1/ il faut donc multiplier la fonction sinus par 3,3 m c'est-à-dire par $A_{MAX} = 3,3$ m. Ainsi :

$$\mathbf{A} = A_{MAX} * \mathbf{Sin}.$$

Difficulté 2- : L'expression précédente n'est pas encore satisfaisante car **A** (0) = 3,3 m (c'est-à-dire **A** (0) = A_{MAX}) alors que **Sin** (0) = 0. Pour résoudre cette difficulté, il suffit de modifier l'expression précédente de la manière suivante :

$$\mathbf{A} = A_{MAX} * \mathbf{Sin} (x + \pi/2)$$

Ainsi, **A** (0) = $A_{MAX} * \mathbf{Sin} (0 + \pi/2) = A_{MAX} * \mathbf{Sin} (\pi/2) = A_{MAX}$

Difficulté 3- : L'expression précédente **A** = $A_{MAX} * \mathbf{Sin} (x + \pi/2)$ pose deux problèmes :

Celui de l'unité : **A** est une fonction d'une variable t qui s'exprime en secondes et **Sin** est une fonction d'une variable x qui s'exprime en radians.

Celui de la valeur de la période : celle de **A** vaut 4,7 s et celle de **Sin** vaut 2π .

On peut illustrer ces problèmes en constatant par exemple que :

A	vaut A_{MAX}	pour $t = 0$ s, pour $t = 4,7$ s, pour $t = 9,4$ s, etc...
Et $A_{MAX} * \mathbf{Sin} (x + \pi/2)$	vaut A_{MAX}	pour $x = 0$, pour $x = 2\pi$, pour $x = 4\pi$, etc...

Pour les résoudre, il faut faire en sorte que :

Lorsque $t = 0$ s	$x = 0$
Lorsque $t = 4,7$ s	$x = 2\pi$
Lorsque $t = 9,4$ s	$x = 4\pi$...

Ce qui nécessite de poser : $x = \frac{2\pi * t}{4,7 \text{ s}}$ c'est-à-dire $x = \frac{2\pi * t}{T}$

Ainsi, l'expression mathématique de **A** (au point d'abscisse) en fonction de t devient :

$$\mathbf{A} (t) = A_{MAX} * \mathbf{Sin} \left(\frac{2\pi * t}{T} + \pi/2 \right)$$

20. Amplitude d'une onde en fonction de l'espace et du temps

Résumons ce qui a été établi aux points précédents. L'amplitude A d'une onde s'écrit :

En fonction de d (à l'instant $t = 0$ s) :
$$A(d) = A_{MAX} * \sin\left(\frac{2\pi * d}{\lambda} - \pi/2\right)$$

En fonction de t (au point M d'abscisse $d_M = 3,5$ m) :
$$A(t) = A_{MAX} * \sin\left(\frac{2\pi * t}{T} + \pi/2\right)$$

L'objectif de ce dernier point est d'exprimer en une unique « formule » (c'est-à-dire une fonction) la hauteur A à la surface de l'eau :

En n'importe quel point de l'espace (c'est-à-dire pour toute valeur de d).

ET À n'importe quel instant (pour toute valeur de t).

La fonction A doit donc dépendre de deux variables indépendantes d et t . Elle se note $A(d, t)$.

Exercice : On veut montrer que l'expression mathématique permettant d'exprimer $A(d, t)$ quels que soient d et t est la suivante :

$$A(d, t) = A_{MAX} * \sin\left(\frac{2\pi * t}{T} - \frac{2\pi * d}{\lambda} - \pi/2\right)$$

1°/ Utiliser l'expression mathématique ci-dessus pour **calculer** les valeurs de :

$$A(0, 0) ; A(5, 0) ; A(8, 0)$$

$$A(0, 1) ; A(5, 1) ; A(8, 1)$$

$$A(0, 3) ; A(5, 3) ; A(8, 3)$$

Données : $A_{MAX} = 3,3$ m $\lambda = 7,2$ m $T = 4,7$ s

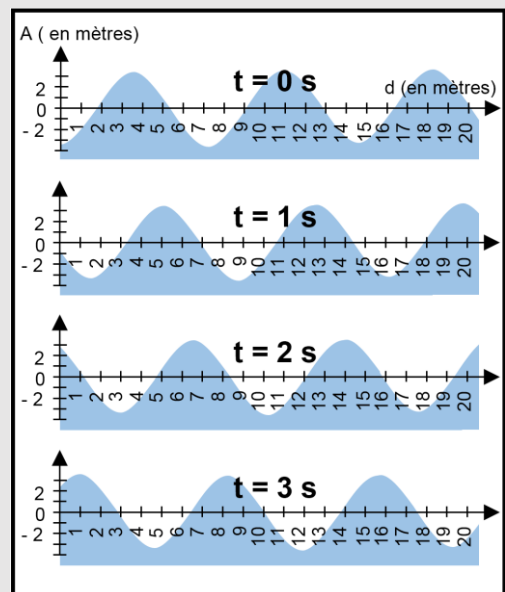
2°/ Utiliser le schéma ci-contre pour **mesurer** les valeurs de :

$$A(0, 0) ; A(5, 0) ; A(8, 0)$$

$$A(0, 1) ; A(5, 1) ; A(8, 1)$$

$$A(0, 3) ; A(5, 3) ; A(8, 3)$$

3°/ Conclure.



BILAN : L'amplitude A d'une onde de longueur d'onde λ et de période temporelle T se propageant selon une seule direction de l'espace (repérée par la coordonnée x) dans le sens le sens croissant de x a pour expression mathématique :

$$A(x, t) = A_{MAX} * \sin\left(\frac{2\pi * t}{T} - \frac{2\pi * x}{\lambda} + \varphi_0\right)$$

Où A_{MAX} représente l'amplitude maximale de l'onde (son unité dépend de la nature de l'onde : A est en mètres dans le cas de la houle, en Pa dans le cas du son, etc...

La valeur de φ_0 est définie par $A(0, 0) = \sin(\varphi_0)$. Il suffit pour déterminer φ_0 de mesurer $A(0, 0)$ puis de calculer sa valeur. φ_0 s'appelle la **phase à l'origine**.